Kapitel 8

Impedans

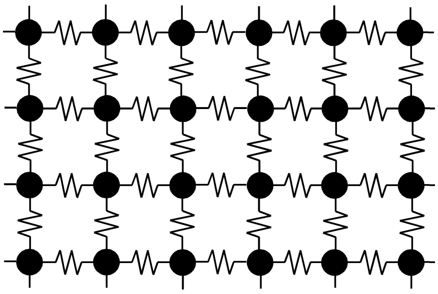
8.1 Reflektion och transmission

Från kapitel 5 vet vi att ljud kan reflekteras, t.ex. i en vägg eller i änden av ett öppet eller slutet rör. Reflektion är dock inte det enda som sker i sådana situationer. En större eller mindre del av ljudet reflekteras, men resten *transmitteras*, det vill säga fortsätter framåt, eventuellt in i ett nytt medium. I avsnitt 5.5 hette det att reflektion kunde ske mot ett tunnare eller tätare medium, och att detta avgjorde huruvida den reflekterade pulsen var blev omvänd eller ej. Att tala om tunnare och tätare medier är fullt tillräckligt vid betraktandet av reflekterade pulser, men i mer komplicerade situationer har man nytta av en bättre preciserad storhet, som kan berätta hur stor andel av ljudintensiteten som reflekteras och hur stor andel som transmitteras. En sådan storhet är *impedansen*. Impedans är ett centralt men tyvärr ganska svårt begrepp inom akustiken. Förståelse av impedans ger en samtidig förståelse av reflektion och transmission.

8.2 Karakteristisk impedans

Ljud är tryckvågor, och för att tryckskillnader ska uppstå måste molekylerna i luften (eller vilket medium det vara månde) röra sig samordnat så att de skapar förtätningar och förtunningar. Molekylerna kan vara mer eller mindre villiga att delta i rörelserna, och de kan vidarebefordra tryckvågen mer eller mindre förändrad eller försvagad. Låt oss försöka bena ut detta på ett någorlunda intuitivt sätt.

För det första kan molekylerna vara mer eller mindre tunga. För att flytta en molekyl (även om det bara är kring ett jämviktsläge) krävs att man accelererar den. För att åstadkomma acceleration måste man anbringa kraft. Ju tyngre molekyl, desto större kraft krävs. För en given acceleration är den nödvändiga kraften proportionell mot massan, enligt Newtons andra lag: $F = ma$. Motståndet mot att vidarebefordra ljudvågor är således större i tyngre medier.



Figur 8.1: Modell över hur luftmolekyler står i kontakt med varandra.

För det andra kan fjädringen mellan molekylerna bjuda motstånd. I ett fast material, t.ex. en gitarrsträng, är molekylerna bundna till varandra, och varje försök att trycka ihop eller dra isär dem kommer att mötas av fjäderliknande motstånd. Motståndet kommer grovt sett att vara proportionell mot avvikelsen från normalt avstånd mellan molekylerna (det är så fjäderkrafter brukar uppträda; se avsnitt 4.1). I en gas, t.ex. luft, är molekylerna inte bundna till varandra, men ändå kommer förtätningar av molekyler att genom ett ökat antal krockar ge upphov till nettokrafter som på samma sätt som i ett fast material vill återställa jämvikten. Det kan därför ibland vara nyttigt att som *modell* tänka sig att luftmolekylerna är jämnt utspridda och förbundna med fjädrar, se figur 8.1. (Men *egentligen* vet vi att luftmolekylernas verkliga lägen i förhållande till varandra snarare liknar figur 5.12, och att det inte finns några fjädrar mellan dem.)

För det tredje kan en del av molekylernas ordnade vågrörelse övergå i oordnad värmerörelse. Vågöverföringen kanske med andra ord inte sker perfekt genom ett helt passivt medium, utan mediets molekyler stjäl en del av rörelsen och omvandlar den till värme. Dessutom kan det förekomma avsevärda förluster vid gränsytor, t.ex. genom att ljudvågor i ett rör värmer upp rörets innerväggar.

Impedans är ett samlingsnamn på allt sådant motstånd mot rörelse. De tre komponenterna som beskrivits ovan har alla egna namn och behandlas närmare i avsnitt 8.5.

Impedans brukar betecknas med Z. Det finns flera sorters impedanser, beroende på vilken typ av situation man betraktar. Låt oss börja med den *karakteristiska akustiska impedansen*, ofta förkortad till karakteristisk impedans, men även kallad *specifik (akustisk) impedans* eller *vågimpedans*. Vi betecknar den med Z_0. Den karakteristiska impedansen är en inneboende egenskap hos ett medium och kan tecknas

$$Z_0 = \rho c,$$

där ρ är mediets densitet och c är ljudhastigheten i mediet. Enheten för impedans blir enligt denna formel $(\mathrm{kg/m^3}) \cdot (\mathrm{m/s}) = \mathrm{kg/m^2s}$. Enheten kallas även med ett eget namn *rayl*,† men namnet är inte så vanligt förekommande och rekommenderas ej.

Medium	Z_0 $(\mathrm{kg/m^2s})$
Alkohol (etyl)	$9{,}1 \cdot 10^5$
Aluminium	$1{,}39 \cdot 10^7$
Bly	$1{,}36 \cdot 10^7$
Gjutjärn	$2{,}85 \cdot 10^7$
Glas (pyrex)	$1{,}20 \cdot 10^7$
Glycerin	$2{,}5 \cdot 10^6$
Havsvatten (vid 13 °C)	$1{,}54 \cdot 10^6$
Hårdgummi	$6{,}5 \cdot 10^4$
Koldioxid	$5{,}2 \cdot 10^2$
Koppar	$2{,}98 \cdot 10^7$
Kvicksilver	$1{,}97 \cdot 10^7$
Luft	$4{,}28 \cdot 10^2$
Luft (vid 20 °C)	$4{,}15 \cdot 10^2$
Ricinolja	$1{,}45 \cdot 10^6$
Silver	$2{,}84 \cdot 10^7$
Stål	$3{,}90 \cdot 10^7$
Syre	$4{,}53 \cdot 10^2$
Sötvatten	$1{,}48 \cdot 10^6$
Vattenånga (vid 100 °C)	$2{,}42 \cdot 10^2$
Väte	$1{,}14 \cdot 10^2$

Den karakteristiska impedansen kan skilja sig mycket mellan olika ämnen. För luft vid normalt lufttryck och temperaturen 20 °C gäller $Z_{luft} \approx 415\ \mathrm{kg/m^2s}$, medan sötvatten vid samma temperatur, 20 °C, har den karakteristiska impedansen $Z_{sötvatten} \approx 1{,}48 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/m^2s}$. Tabellen ovan anger

† Uppkallad efter John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh (1842–1919), brittisk fysiker. Rayleigh lämnade bidrag till många grenar av fysiken, och är känd inte minst för sin monumentala *Theory of Sound* i två band (1877–78).

karakteristiska impedanser för ett antal medier. I tabellen avser, om inte annat anges, värdena för flytande ämnen temperaturen 20 °C, medan värdena för gaser avser temperaturen 0 °C och normalt atmosfärstryck. Man kan se att Z_0 för gaser ligger kring 10^2 kg/m^{2}s, för vätskor kring 10^6 kg/m^{2}s och för fasta material kring 10^7 kg/m^{2}s.

En alternativ formel för Z_0
I en överkursruta i avsnitt 7.2 framgick att ljudhastigheten i ett material allmänt kan skrivas $c = \sqrt{B/\rho}$, där B är ett mått på mediets styvhet (kompressionsmodulen) och ρ är mediets densitet. Både B och ρ är rena materialegenskaper. Faktum är att dessa storheter också räcker för att beskriva impedansen:

$$Z_0 = \sqrt{B\rho}$$

Från denna formel kan man ta sig till formeln $Z_0 = \rho c$ genom att utnyttja sambanden $c^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$ och $B = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$.

Vid ljudövergångar mellan olika medier är det kvoten mellan mediernas impedanser som bestämmer hur stor del av energin (intensiteten) som reflekteras respektive transmitteras. Sålunda kan intensiteten i material 2, I_2, bestämmas ur intensiteten i material 1, I_1, genom formeln $I_2 = I_1 \cdot t$, där *transmissionskoefficienten*

$$t = \frac{4Z_{21}}{(1 + Z_{21})^2}$$

och Z_{21} är kvoten mellan materialens karakteristiska impedanser, $Z_{21} = Z_2/Z_1$. Transmissionskoefficienten är ett tal mellan 0 och 1 som anger hur stor andel av energin som transmitteras. (Man kan också definiera en reflektionskoefficient r, så att $r + t = 1$, under antagandet att ingen energi absorberas vid gränsytan. Om absorption, se avsnitt 9.3.) Formeln gäller i bägge riktningar, oavsett om Z_1 eller Z_2 är störst.

∇ Som nämnts är impedansskillnaden stor mellan luft och vatten. Luftburet ljud som stöter på en vattenyta reflekteras därför i hög grad. Endast en liten del av ljudenergin överförs till vattnet. Med $Z_{sötvatten} = 1{,}48 \cdot 10^6$ kg/m^{2}s och $Z_{luft} = 415$ kg/m^{2}s fås $t = \frac{4 \cdot (1{,}48 \cdot 10^6/415)}{(1+(1{,}48 \cdot 10^6/415))^2} \approx 0{,}0011$. Således är det endast ca 0,1 % av ljudintensiteten som tränger ned i vattnet. Det motsvarar en nivåminskning på 30 dB.

Härledning av formeln för t vid övergång mellan två medier
Formeln för transmissionskoefficienten, $t = \frac{4Z_{21}}{(1+Z_{21})^2}$, kan härledas på följande sätt. Ljudvågor befinner sig i medium 1, som har den karakteristiska impedansen Z_1. Vågorna faller in rakt mot gränsytan till medium 2, i vilket den karakteristiska impedansen är Z_2. Infallande vågor är associerade med ett visst ljudtryck p_i och en viss (genomsnittlig) partikelhastighet v_i. En del av vågenergin reflekteras vid gränsytan tillbaka till medium 1. Reflekterade vågor har trycket p_r och partikelhastigheten v_r. Resten transmitteras in i medium 2, med trycket p_t och partikelhastigheten v_t.

Precis bredvid gränsytan måste såväl trycken som partikelhastigheterna vara lika stora på bägge sidor om ytan. Detta är kanske inte intuitivt självklart, men det måste vara så, för annars skulle dels gränsytan inte längre vara en yta utan en ”gränsvolym”, dels skulle en omedelbar ändring av partikelhastigheterna kräva oändlig acceleration. I medium 1 består det totala ljudfältet av superpositionen av infallande och reflekterade vågor. I medium 2 består ljudfältet enbart av transmitterade vågor. Således måste följande samband gälla:

$$p_t = p_i + p_r$$

$$v_t = v_i + v_r$$

Impedansen kan allmänt skrivas $Z = p/v$ (se avsnitt 8.3), varför vi kan skriva

$$\begin{aligned} Z_1 &= p_i/v_i \\ Z_1 &= -p_r/v_r \\ Z_2 &= p_t/v_t \end{aligned}$$

(Minustecknet i den andra formeln kommer sig av att den reflekterade vågen rör sig i motsatt riktning, mot ljudkällan.) Med hjälp av dessa fem ekvationer kan man komma fram till sambandet

$$\frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Med beteckningen $Z_{21} = Z_2/Z_1$ kan ekvationen skrivas om till

$$\frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_{21}}{1 + Z_{21}}.$$

Allmänt gäller (se avsnitt 8.8) att ljudintensitet och ljudtryck är förbundna enligt formeln $I = p^2/Z$. Således har vi $I_t = p_t^2/Z_2$ och $I_i = p_i^2/Z_1$. Dessa formler kombineras till

$$\begin{aligned} t &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{p_t^2/Z_2}{p_i^2/Z_1} = \left(\frac{p_t}{p_i}\right)^2 \cdot \frac{1}{Z_{21}} \\ &= \left(\frac{2Z_{21}}{1+Z_{21}}\right)^2 \cdot \frac{1}{Z_{21}} \\ &= \frac{4Z_{21}}{(1+Z_{21})^2} \end{aligned}$$

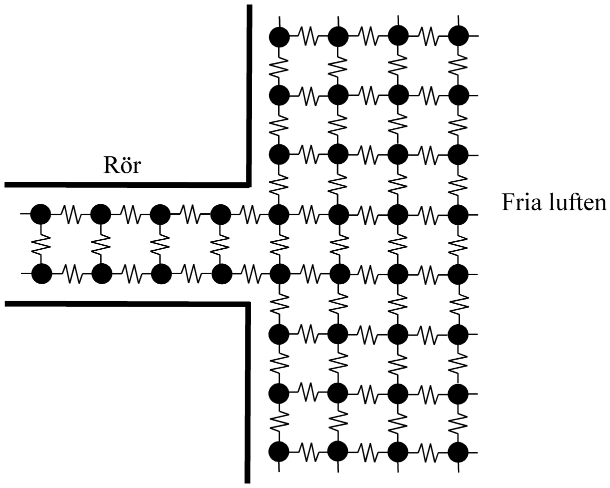
vilket ju är precis vad vi söker.

8.3 Ljudfältsimpedans

Den karakteristiska impedansen är en materialegenskap, och är mycket användbar vid generella situationer av typen ”övergång från luft till vatten”, där man antar att övergången sker i fri rymd, det vill säga inte instängt i ett rör eller dylikt. Men så fort ljudvågorna befinner sig inne i något system, kommer systemets mekaniska konstruktion och geometriska utseende att påverka impedansen, och därmed eventuella transmissioner och reflektioner.

Det bör inte vara svårt att förstå varför. Impedans består bl.a. av fjädring. Om vi trycker på luft i fri rymd fjädrar den tillbaka beroende på den naturliga fjädringen mellan luftmolekylerna. Om vi däremot trycker på luft instängd i ett slutet rör med hjälp av en kolv, kommer luften att fjädra på ett annorlunda sätt. Då är det ju inte enbart luftmolekylernas inbördes fjädring som spelar roll, utan också fjädringen mellan luftmolekylerna och rörets väggar. Fjädringen blir mycket större när luften är instängd än när den är fri. Därför blir impedansen olika i de två fallen.

Figur 8.2 visar ytterligare ett exempel på hur ett systems faktiska utseende påverkar impedansen. Figuren visar schematiskt hur luftpartiklarna i ett rör står i kontakt med luften utanför. Vi känner till att reflektioner kan förekomma vid rörändar, t.ex. så att stående vågor uppkommer. Utifrån kunskap om mediers karakteristiska impedanser kan vi dock inte förutsäga det. Eftersom det är luft såväl i röret som utanför, borde det inte ske någon reflektion vid rörändan. Men så sker. Slutsatsen vi måste dra är att karakteristiska impedanser inte förslår här.



Figur 8.2: Modell över hur luftpartiklar interagerar inom och utanför ett rör. Vi kan tänka oss att en ljudvåg kommer i röret från vänster. Inuti röret råder en viss impedans. Vid öppningen stöter ljudvågen på en annan luftmassa (fria luften) som har en annan impedans. Därför kommer en del av ljudvågen att reflekteras tillbaka in i röret. Figur efter Ovegård & Till (1998).

En impedans som gäller generellt, och där man tagit hänsyn till ljudsystemets faktiska utseende, är den s.k. *ljudfältsimpedansen*. Formeln för ljudfältsimpedans är

$$Z = \frac{p}{v},$$

där p är trycket och v är partikelhastigheten. Enligt denna formel blir enheten $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s/m}$, vilket är samma sak som $\mathrm{kg/m^2s}$.

Formeln $Z = p/v$ är rimlig som mått på motstånd mot rörelse, eftersom den anger förhållandet mellan en storhet som befrämjar rörelse (tryck) och en storhet som anger hur stor rörelsen verkligen är (hastighet). Om partiklarnas hastighet (v) är liten trots att trycket (p) är stort, så blir impedansen p/v stor, det vill säga motståndet mot rörelse är stort. Om å andra sidan ett litet tryck (p) räcker för att skapa stora partikelhastigheter (v), är impedansen p/v liten.

Både p och v varierar hela tiden, och vi har sagt att vi med p menar ljudtryckets effektivvärde (RMS-värde). Detsamma gäller v. När vi räknar ut partikelhastigheten med hjälp av formeln $Z = p/v$ får vi alltså ut en genomsnittlig hastighet.

Hur hänger nu karakteristisk impedans och ljudfältsimpedans ihop? Svaret är att ljudfältsimpedansen alltid kan efterfrågas, medan den karakteristiska impedansen bara är meningsfull att beräkna i fri rymd. För en plan våg som inte är instängd i något rör eller dylikt är karakteristisk impedans och ljudfältsimpedans således lika: $Z = p/v = \rho c$.

∇ En plan våg i luft, där $\rho c = 415$ Pa$\cdot$s/m, fortplantas med ljudtrycket 10^{-2} Pa. Vad är den genomsnittliga partikelhastigheten? *Lösning*: Formeln $v = p/\rho c$ ger $v = 10^{-2}/415 \approx 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ m/s. Detta är en mycket liten hastighet, men man ska komma ihåg att det är tätt mellan luftmolekylerna. Vid normalt tryck och rumstemperatur är medelavståndet mellan luftens molekyler typiskt 10^{-9} eller 10^{-8} m. Partikelhastigheten är oberoende av frekvensen, vilket däremot inte gäller partikelförskjutningen. (Se övningsuppgift 8-11 för uträkning av en typisk partikelförskjutning.)

Formeln för ljudfältsimpedans är $Z = p/v$, har vi sagt. Tyvärr finns också en annan formel som med ungefär lika stor rätt kan hävdas vara formeln för ljudfältsimpedans, och formlerna är inte samstämmiga. Den alternativa formeln är

$$Z = \frac{p}{U},$$

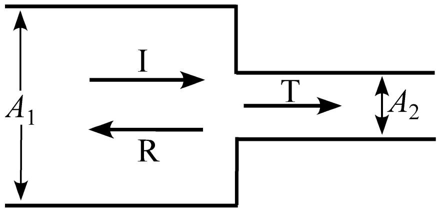
där p är ljudtrycket och U är partikelhastigheten multiplicerad med den tvärsnittsarea genom vilken ljudet rör sig. I ett rör är U under rimliga antaganden en bevarad storhet, det vill säga den ändras inte trots att tvärsnittsarean ändras. Partikelhastigheten ändras däremot med tvärsnittsarean. Därför är det rimligt att använda U istället för v vid betraktelser av impedansen i rör och förträngningar.

Således kan mycket generellt sägas att ett luftfyllt rör med tvärsnittsarean A har impedansen $Z = \rho c/A$, där ju ρc är den vanliga karakteristiska impedansen. Enheten för impedans enligt formeln $Z = p/U$ blir Pa$\cdot$s/m^3. Enheten kallas även *akustisk ohm*.

Låt oss anta att ett rör har tvärsnittsarean A_1 fram till en viss punkt, där röret plötsligt blir smalare och har tvärsnittsarean A_2 (med $A_1 > A_2$); se figur 8.3. En ljudvåg som kommer i den tjockare delen av röret kommer till viss del av transmitteras och till viss del reflekteras när den når fram till avsmalningsstället. Den tjockare delen av röret har impedansen $Z_1 = \rho c/A_1$, den smalare delen $Z_2 = \rho c/A_2$. Man kan visa att t i detta fall blir

$$t = \frac{4A_1A_2}{(A_1 + A_2)^2}.$$

Transmissionskoefficienten kan här således uttryckas med hjälp av enbart tvärsnittsareorna.



Figur 8.3: I ett luftfyllt rör kommer en ljudvåg från vänster (I). När vågen når fram till en plötslig avsmalning, där tvärsnittsarean ändras från A_1 till A_2, reflekteras en del av vågen (R), medan resten transmitteras (T).

∇ Vad blir transmissionskoefficienten om rörets diameter plötsligt halveras? *Lösning*: Om diametern halveras så blir tvärsnittsarean bara en fjärdedel, ty arean är proportionell mot diametern – eller radien – i kvadrat. Vi kan därför sätta in tvärsnittsareorna A_1 och $A_2 = A_1/4$ i formeln. Det ger $t = \frac{4A_1 \cdot A_1/4}{(A_1+A_1/4)^2} = \frac{A_1^2}{(5A_1/4)^2} = \frac{16}{25} = 0{,}64$.

∇ Vad skulle det innebära att $A_2 = 0$? Det måste betyda att röret har en stängd ände. Enligt formeln blir då transmissionen lika med noll. Detta ligger ju i närheten av sanningen, åtminstone om väggen är hård.

Ovan gjorda betraktelser av impedansen i rör med olika tvärsnittsareor gäller tyvärr bara i ytterst idealiserade fall, nämligen när rören är oändligt långa. (Alternativt gäller betraktelserna bara den allra första vågfronten.) Så fort reflektion uppkommer, så att inkommande och reflekterad våg superponeras, blir det mycket mer komplicerat att beräkna impedansen.

8.4 Impedansmatchning

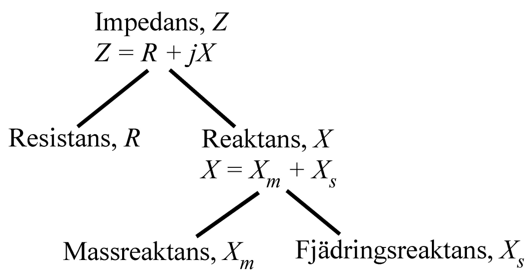
Vi har sagt att det är impedanserna, och mer specifikt kvoten mellan impedanserna, hos olika medier eller olika delar av ett akustiskt system som bestämmer hur väl ljud transmitteras. En plötslig, stor impedansändring är inte gynnsam för ljudtransmission. En gradvis impedansövergång ger större transmission. Man talar i sådana sammanhang om *impedansmatchning* eller *impedansanpassning*. Några exempel:

∇ Megafoner har ofta inbyggd elektrisk förstärkning. Men även utan sådan förstärkning fungerar en megafon som en impedansmatchare, genom att den ger en mer gradvis ökning av tvärsnittsarean än den abrupta övergången från munnen ut i fria luften. Transmissionen blir därmed effektivare.

∇ Impedansskillnaden mellan fria luften och vätskan i hörselsnäckan (cochlea) i innerörat är mycket stor. De små hörselbenen har impedansmatchande funktion, bland annat genom att överföra vibrationerna vid trumhinnan till en mindre yta vid ovala fönstret.

8.5 Impedansens komponenter

Impedans kan sägas bestå av två komponenter, *resistans* och *reaktans*, vilka brukar betecknas R respektive X. Reaktansen kan i sin tur delas upp i *tröghetsreaktans* eller *massreaktans*, med beteckningen X_m, och *fjädringsreaktans* eller *elastisk reaktans*, med beteckningen X_s. Se figur 8.4. Alla komponenter mäts i samma enhet som impedansen själv.



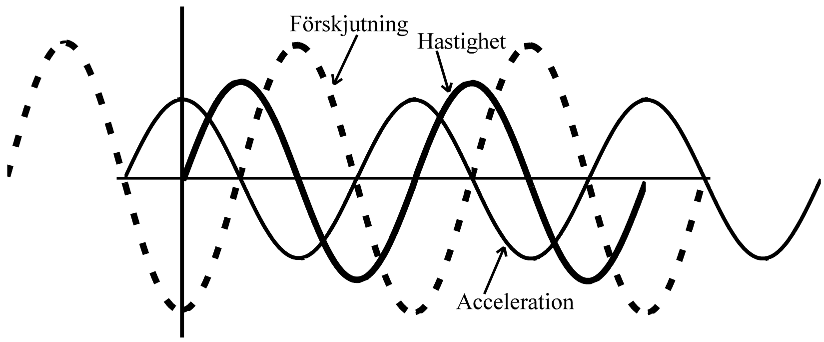
Figur 8.4: Impedansens komponenter.

Vad står dessa komponenter för? Jo, de motsvarar de tre slagen av rörelsemotstånd som presenterades i avsnitt 8.2. Massreaktansen X_m är det motstånd som uppkommer av att man måste flytta på luftmolekylerna. Detta kräver kraft, eftersom man måste accelerera molekylerna. Massreaktansen är således knuten till accelerationen.

Fjädringsreaktansen X_s är motståndet som uppkommer genom fjädring mellan luftmolekyler, eller mellan luftmolekyler och rörväggar eller dylikt. Fjädringsreaktansen är knuten till partikelförskjutningen (avvikelsen från jämviktsläget), ty en fjäders återförande kraft är proportonell mot dess avvikelse från jämviktsläget.

Resistansen, slutligen, är det motstånd som uppkommer genom att en del av den ordnade vågrörelsen övergår i oordnad värmerörelse. Resistansen är knuten till partikelhastigheten: ju större partikelhastighet desto större resistans. Ibland brukar man likna akustisk resistans vid vanlig ytfriktion, såsom mellan en pulka och snön. Liknelsen är inte så lyckad, eftersom vanliga friktionskrafter brukar vara oberoende av hastigheten. En bättre jämförelse är med det luft- eller vattenmotstånd som en kropp känner när den rör sig genom luft respektive vatten. Det motståndet är proportionellt mot hastigheten. Akustisk resistans tar bort energi från ljudvågen. Med en fackterm säger man att resistansen medför *dissipation* (omvandling till värmeenergi av annan energi).

Massreaktansen är knuten till accelerationen, fjädringsreaktansen till förskjutningen och resistansen till hastigheten. Dessa tre storheter är fasförskjutna i förhållande till varandra. När partikelförskjutningen är som störst, är hastigheten som minst, men samtidigt kan man förvänta sig att (beloppet av) accelerationen är som störst. Låt oss betrakta en sinusrörelse, som är enklast tänkbara periodiska rörelse. Det visar sig att hastigheten ligger 90° efter förskjutningen, och att accelerationen ligger ytterligare 90° efter hastigheten. Se figur 8.5.



Figur 8.5: Förskjutning, hastighet och acceleration hos en sinusrörelse, betraktad i en viss punkt. Den horisontella axeln (x-axeln) representerar tiden. Den feta heldragna kurvan är hastigheten, den tunna heldragna är accelerationen och den streckade är förskjutningen. För den som behärskar derivator är det naturligt att säga att accelerationskurvan är (tids)derivatan av hastighetskurvan, som i sin tur är derivatan av förskjutningskurvan. Amplituderna hos kurvorna är godtyckligt valda så att de blivit olika stora och därmed är lätta att skilja åt.

Massreaktansen och fjädringsreaktansen motverkar således varandra, eftersom de har en fasskillnad på 180°, medan resistansen, som är knuten till hastigheten, fasmässigt ligger mitt emellan de två reaktanserna. Hur detta kan representeras matematiskt och grafiskt redogörs för i avsnitt 8.6.

Resistans innebär som sagt dissipation. Dissipation kan ske under många omständigheter och på många sätt. Det är därför svårt att ange några enkla matematiska samband för resistansens beroende av andra storheter, med undantag av ljudhastigheten, där det generellt gäller att resistansen är proportionell mot hastigheten. Reaktanserna, däremot, har vi förklarat med hänvisning till två enkla fysikaliska lagar: $F = ma$ (massreaktansen) och $F = \kappa x$ (fjädringsreaktansen). Därför finns det mer att säga om reaktanserna, särskilt deras beroende av frekvensen. Det visar sig att följande två samband gäller för mekaniska system:

$$\begin{aligned} X_m &= 2\pi f m \\ X_s &= \frac{\kappa}{2\pi f} \end{aligned}$$

(Alternativt kan man skriva $X_m = \omega m$ och $X_s = \kappa/\omega$, där $\omega = 2\pi f$ är vinkelfrekvensen.) Massreaktansen är således proportionell mot massan, och fjädringsreaktansen är proportionell mot fjädringen (styvheten). Det är inte så underligt. Ännu intressantare är kanske att X_m är proportionell mot frekvensen, medan X_s är omvänt proportionell mot frekvensen.

Observera att de matematiska sambanden för X_m och X_s gäller *mekaniska* system. För akustiska system gäller inte dessa formler rakt av, utan de måste modifieras. Vi går dock här inte in på det. Mekanisk mass- och fjädringsreaktans har enheten kg/s, medan de akustiska motsvarigheterna har enheten $\mathrm{kg/m^4s}$, vilket är detsamma som akustisk ohm.

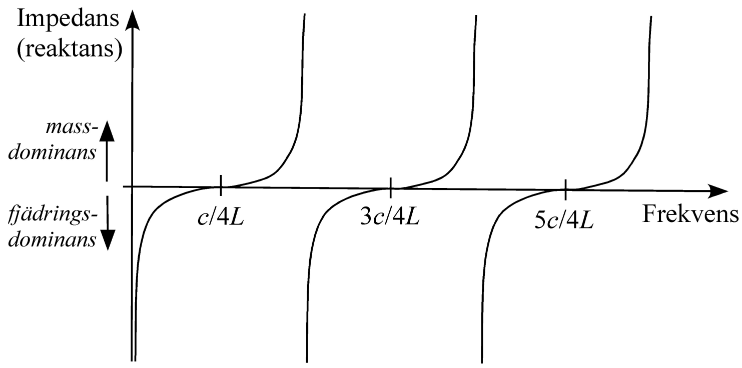
> *Formlerna för X_m och X_s*
> Varför är formlerna för X_m och X_s rimliga? Antag ett föremål som svänger sinusformat med vinkelfrekvens ω. Hastigheten kan skrivas $v = v_{max}\sin(\omega t)$. Förskjutningen är då (genom tidsintegrering) $x = \frac{v_{max}}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, medan accelerationen är (genom tidsderivering) $a = \omega v_{max}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. En fjäderkraft kan skrivas $F = \kappa x$, vilket ger $F = \frac{\kappa}{\omega}v_{max}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, medan en kraft som ska accelerera en massa skrivs $F = ma$, vilket ger $F = m\omega v_{max}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Vi ser alltså att fjäderkraften är lika med κ/ω gånger hastigheten, så när som på en fasförskjutning, och att masskraften är lika med $m\omega$ gånger hastigheten, så när som på en (annan) fasförskjutning.

8.6 Impedans som komplex storhet

Vi har ovan sagt att för en plan våg i fri rymd är karakteristisk impedans och ljudfältsimpedans lika: $p/v = \rho c$. Vi har sagt att såväl p som v är genomsnittsvärden, och vi har givit ett konkret räkneexempel. Exemplet avsåg en plan våg i fri utbredning, och det är faktiskt endast i detta fall som formeln kan användas så rättframt. I en sådan våg ligger nämligen p och v i fas, så att i varje litet volymselement kvoten mellan dem är lika med ρc.

Men i ljudvågor som inte är plana, eller som utbreder sig i rör eller dylikt, ligger inte p och v nödvändigtvis i fas. Vi känner till att stående vågor i rör i vissa punkter kan ha ljudtrycket p lika med noll, och då blir förstås även kvoten p/v lika med noll. I andra punkter är partikelhastigheten v lika med noll, och då blir kvoten p/v oändligt stor (eller oändligt liten). Impedansen varierar således beroende på vilken punkt man betraktar.

Ett alternativt sätt att åskådliggöra detta är att välja en speciell punkt där man betraktar impedansen, och sedan variera frekvensen. Från avsnitt 5.5 vet vi ju att stående vågor i rör uppkommer vid vissa frekvenser som kan uttryckas med hjälp av ljudhastigheten c och rörets längd L. Vid de frekvenser där stående vågor uppkommer är impedansen minimal. Om vi t.ex. tar ett öppet-slutet rör och betraktar impedansen vid den öppna änden som funktion av frekvensen, kommer vi att få en graf liknande figur 8.6.

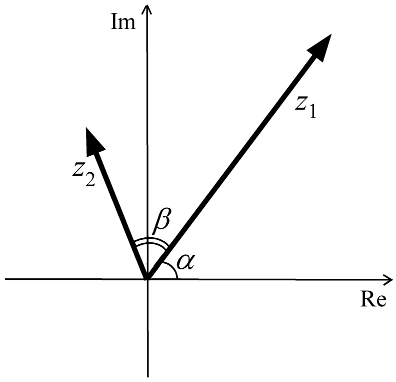


Figur 8.6: Impedansen vid öppningen till ett öppet-slutet rör som funktion av frekvensen. Röret har längden L. Ljudhastigheten är c. Figuren visar egentligen bara den reaktiva delen, det vill säga den resisitiva delen antas vara lika med noll. Som synes varierar reaktansen (impedansen) mycket med frekvensen, och är noll vid resonansfrekvenserna. Strax ovanför varje resonansfrekvens dominerar massreaktansen, strax nedanför dominerar fjädringsreaktansen.

Kontentan av allt detta är att det vore praktiskt med en matematisk representation av fasskillnader mellan p, v och andra intressanta storheter, såsom accelerationen och förskjutningen. En lämplig matematisk metod för detta existerar, nämligen att använda *komplexa tal*. Tyvärr bemästrar man inte komplexa tal i en handvändning, och det ligger utanför denna framställnings ambition att ge en grundlig introduktion till dem. Vi ska nöja oss med några grundfakta:

- Komplexa tal, som ofta betecknas med litet z, består av två delar: $z = x + jy$. Den ena delen, x, är ett vanligt reellt tal (ett heltal eller ett decimaltal, positivt eller negativt). Den andra delen består av ett annat reellt tal, y, multiplicerat med ett tal j, som kallas imaginära enheten och som definieras $j = \sqrt{-1}$.† Talet j är ganska besynnerligt. Om du försöker slå $\sqrt{-1}$ på en miniräknare får du ett felmeddelande till svar. Talet är alltså en teoretisk konstruktion. Det finns inte på samma sätt som vanliga, reella tal. Talet x är *realdelen* (eller *reella delen*) av det komplexa talet z, medan y är *imaginärdelen*.

- Även om det kanske är svårt att få grepp om vad j egentligen betyder, så är det följande viktigast i praktiken: *Realdel och imaginärdel kan inte adderas och subtraheras på vanligt, aritmetiskt vis.* Det komplexa talet $z = 6 + j8$ kan inte skrivas kortare än så. Man kan inte lägga ihop 6 och $j8$ och säga att summan blir 14 eller något liknande.



Figur 8.7: Två komplexa tal utritade i ett komplext talplan. *Re* står för reella axeln, *Im* för imaginäraxeln. Vinkeln mellan det ena talet och reella axeln har markerats med α. Vinkeln mellan pilarna har markerats med β.

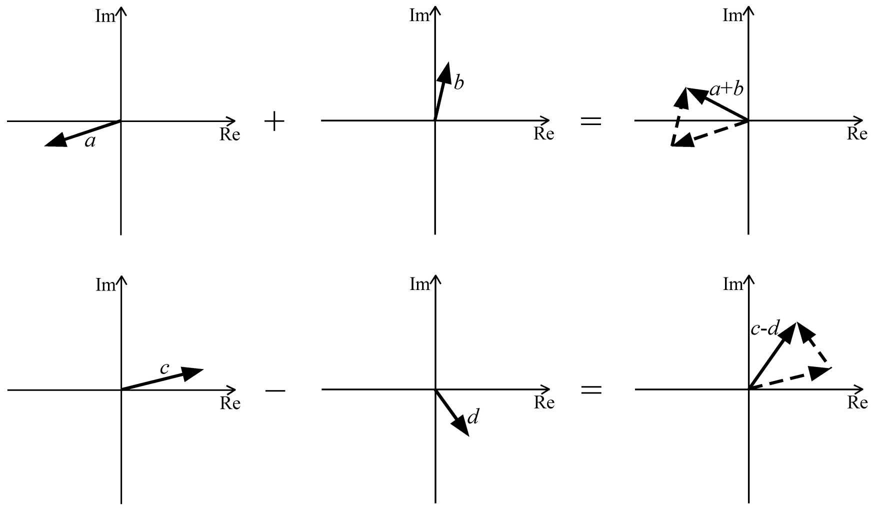
- Däremot kan man visualisera komplexa tal i ett plan, där x-axeln kallas reella axeln och y-axeln kallas imaginära axeln. Ett komplext tal motsvarar då en pil eller en sträcka från origo till en viss punkt i planet. Exempel ges i figur 8.7.

- Genom figurtänkandet kan man ge det komplexa talet en absolut storlek, nämligen pilens längd. Denna längd kan uttryckas med ett vanligt

†Bokstaven i är ungefär lika vanlig som j som symbol för imaginära enheten.

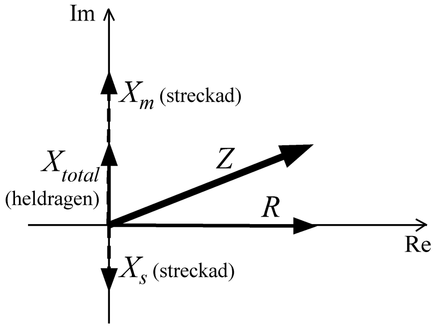
reellt tal, som fås genom Pythagoras sats: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (De lodräta strecken kring z betyder 'beloppet av'.) Pilens längd hos talet $z = 6+j8$ blir till exempel $|z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.

- Vinkeln mellan olika pilar eller mellan en pil och en axel representerar en fasskillnad. Fasskillnaden α i figur 8.7 är ungefär 53°, medan fasskillnaden β är ungefär 59°.
- Addition och subtraktion mellan komplexa tal görs på så vis att realdelarna och imaginärdelarna adderas/subtraheras för sig. Grafiskt görs det genom att man lägger den adderade/subtraherade pilens skaft vid den andra pilens spets. Vid subtraktion måste man först vrida den subtraherade pilen 180°, men i övrigt ska man inte ändra pilarnas riktningar. Figur 8.8 ger exempel.



Figur 8.8: Exempel på addition och subtraktion av komplexa tal. Den översta raden visar hur addition av vektorerna a och b ger vektorn $a + b$. Den nedre raden visar på samma sätt hur subtraktion går till.

Impedans kan betraktas som en komplex storhet, där resistansen R är reell medan reaktansen X är imaginär: $Z = R + jX$. Massreaktansen X_m ritas längs positiva imaginära axeln, fjädringsreaktansen X_s längs negativa imaginära axeln. På så sätt blir det 90° fasskillnad mellan var och en av reaktanserna och resistansen, och 180° fasskillnad mellan de två reaktanssorterna. Se figur 8.9.



Figur 8.9: Visualisering av impedansens komponenter i ett komplext talplan. Den sammanlagda impedansen är markerad med Z.

Eftersom X_m och X_s är motriktade, blir den sammanlagda reaktansen lika med $X = X_m - X_s$. Man kan med andra ord säga att impedansen är $Z = R + j(X_m - X_s)$. Enligt Pythagoras sats blir då impedansens belopp

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_m - X_s)^2}.$$

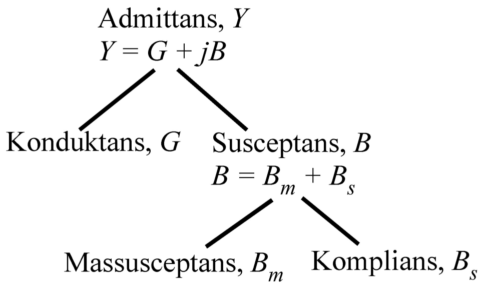
Vinkeln mellan Z och R (eller med andra ord mellan Z och den positiva reella axeln) kallas impedansens fas.

8.7 Admittans

Impedans är namnet på motståndet mot att vidarebefordra ljud. Man skulle kunna definiera motsatsen, alltså beredvilligheten eller eftergivenheten att låta ljud passera. Denna storhet kallas *admittans* (jämför engelskans *admit* 'medge', 'släppa in') och brukar betecknas Y. Matematiskt definieras admittansen $Y = 1/Z$, det vill säga admittansen är impedansens invers.

På analogt sätt kan man definiera motsatserna till resistans och reaktans, kallade *konduktans* (G) respektive *susceptans* (B). I figur 8.10 är admittansens olika komponenter utskrivna på precis samma sätt som i figur 8.4. Observera att motsatsen till fjädringsreaktans brukar kallas *komplians*, inte "fjädringssusceptans" som kanske hade varit mer logiskt. Det är vanligt att komplians betecknas med C istället för B_s.

Med hjälp av definitionerna $Z = R + jX$, $Y = 1/Z$ och $Y = G + jB$ samt räkneregler för komplexa tal kan man efter lite möda komma fram till formler som förbinder konduktans och susceptans med resistans och



Figur 8.10: Admittansens olika komponenter. Jämför med figur 8.4.

reaktans, och vice versa. Formlerna lyder:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|Z|^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{|Z|^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|Y|^2}$$

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{B}{|Y|^2}$$

Begreppen admittans, konduktans, susceptans och (i synnerhet) komplians används gärna av audiologer och audionomer, men mer sällan av akustiker (fysiker). Som samlingsbegrepp på impedans och admittans har föreslagits *immittans*. Immittans betyder alltså antingen impedans eller admittans, beroende på sammanhanget. I och med att immittansen därmed inte är någon egen storhet, så kan man strängt taget inte mäta den. Det man mäter är impedansen eller admittansen. Fysiker säger därför inte gärna immittans, men begreppet är vanligt inom audiologin.

En luftkavitets akustiska impedans

Antag att en viss volym luft är instängd i en kavitet (hålighet) med hårda väggar, så när som på en öppning där ljud kan komma in. Om kavitetens dimensioner (och därmed volymen) är små jämfört med ljudets våglängd, kan man visa att luftvolymen impedansmässigt beter sig som en ren reaktans:

$$Z = \frac{-j\rho_0 c^2}{\omega V},$$

där j är imaginära enheten (vilket motsvarar att vi har en ren reaktans), ρ_0 är luftens densitet, c är ljudhastigheten, ω är vinkelfrekvensen och V är kavitetens volym (Haughton 2002, s. 254f). Minustecknet indikerar att reaktansen helt och hållet utgörs av komplians (fjädring). Ibland uttrycker man akustisk impedans (eller admittans) i form av en ekvivalentvolym. Detta synsätt härrör från exemplet och formeln ovan. Om impedansen hos en luftkavitet är $|Z|$, och admittansen således är $|Y| = 1/|Z|$, motsvarar ju detta ekvivalentvolymen

$$V = \frac{|Y|\rho_0 c^2}{\omega}.$$

Vid rumstemperatur finner man att volymen $V = 1\ \mathrm{cm}^3$ har den akustiska impedansen $10^8\ \mathrm{Ns/m}^5$ vid frekvensen $f = 226$ Hz. Volymen är direkt proportionell mot admittansen, och vid $f = 226$ Hz är deras numeriska värden desamma (så när som på en faktor på några tiopotenser). Detta är praktiskt, t.ex. i audiologiska sammanhang. Mellanörats akustiska admittans vid $f = 226$ Hz kan således enkelt fås fram genom att man mäter mellanörats volym.

8.8 Intensitet, tryck och impedans

Tryck och intensitet – ett klargörande eller förbryllande tankeexperiment

Antag att en ljudkälla med effekten W_A på ett visst avstånd ger ljudtrycket p_A. Intensiteten är proportionell mot trycket i kvadrat, så intensiteten på aktuellt avstånd kan skrivas $I \propto p_A^2$.

Om man har två (likadana) ljudkällor på tillräckligt stort avstånd från varandra, var och en med effekten W_A och resulterande ljudtryck p_A, så blir ljudtrycket i en tredje punkt (skild från ljudkällorna) lika med summan av trycken från respektive källa. I denna tredje punkt kan deltrycken ibland förstärka varandra, ibland släcka ut varandra, beroende på löpvägen och våglängden. Kort sagt: deltrycken är inte nödvändigtvis i fas i den tredje punkten, även om de två ljudkällorna skulle ge ifrån sig samma signal samtidigt. Man kan visa att summans effektivvärde i den tredje punkten är $\sqrt{2}p_A$. För intensiteten gäller $I \propto p^2 = \left(\sqrt{2}p_A\right)^2 = 2p_A^2$.

Om man nu flyttar ihop ljudkällorna så att de (idealt sett) hamnar oändligt nära varandra, kommer ljudtrycken att vara i fas överallt i rummet. Var som helst i rummet gäller att $p_{tot} = p_A + p_A = 2p_A$. Intensiteten blir $I \propto p^2 = (2p_A)^2 = 4p_A^2$. Det verkar alltså som att vi fått dubbelt så stor intensitet överallt i rummet jämfört med när ljudkällorna var åtskilda. Det är orimligt. Vad är felet?

Felet är antagandet att ljudkällorna kan ge ifrån sig samma effekt W_A trots att de står alldeles bredvid varandra. Källorna påverkar varandra ömsesidigt. Därför krävs mer effekt än W_A från var och en av källorna när de ljuder samtidigt för att ge samma ljudtryck som skulle fås om de ljöd var och en för sig. Detta är sant även om ljudkällorna inte står oändligt nära varandra, men är kanske enklast att förstå i det fallet.

Impedans förbinder ljudintensitet med ljudtryck:

$$I = \frac{p^2}{Z_0}$$

Formeln förklarar varför faktorn 20 istället för 10 står i formeln för (se kapitel 6). Vid logaritmering förvandlas ju en upphöjd 2:a till en multiplikation med 2. Vi har tidigare konstaterat att p normalt sett betecknar effektivvärdet taget över en viss tidsperiod. Eftersom I och p är förbundna enligt formeln ovan, måste även I beteckna något slags medelintensitet över en viss tid.

Varför är intensiteten (eller energin) proportionell mot trycket i kvadrat? Ett intuitivt sätt att förstå detta kunde vara följande resonemang: Effekten är kraft gånger sträcka dividerat med tid. Kraften F är tryck gånger area. För en given area kan vi alltså säga att kraften är proportionell mot trycket: $F = k_1 p$ (här liksom annorstädes syftar p på tryckets effektivvärde). Hastigheten, det vill säga den sträcka s som en partikel kommer att förflyttas på en viss tid beror också på trycket. Ju större tryck, desto större sträcka. Det är därför inte orimligt att även sträckan är proportionell mot trycket: $s = k_2 p$. Om vi nu multiplicerar ihop kraft och sträcka får vi $W = Fs = k_1 p \cdot k_2 p = k_3 p^2$, där konstanten $k_3 = k_1 k_2$. Denna lilla övning (som lånats från Jönsson & Johansson 1996) utgör inget strikt bevis för att intensiteten är proportionell mot trycket i kvadrat, men den är förhoppningsvis ett gott argument för att så är fallet. En något annorlunda motivering finns i det överkursmarkerade avsnittet här nedan.

Sambandet mellan I och p

Ett någorlunda formellt resonemang som visar varför intensiteten är proportionell mot trycket i kvadrat är följande: Antag att ett (oändligt stort) plan vid $x = 0$ strålar ut ljud i halvrymden $x > 0$. När planet rör sig med hastigheten $v(t)$ gör den så att den intilliggande luften får samma hastighet. Luftens rörelse ger då upphov till trycket $p(t) = \rho c v(t)$ vid gränsytan $x = 0$, ty vi har ju sagt att impedansen kan skrivas $\rho c = \frac{p}{v}$ för en plan våg som inte är instängd i ett rör eller dylikt. Intensitet är lika med tryck gånger hastighet, vilket kan visas så här:

$$\begin{aligned} \text{Intensitet} &= \frac{\text{Effekt}}{\text{Area}} = \frac{\text{Energi}}{\text{Tid} \cdot \text{Area}} = \frac{\text{Arbete}}{\text{Tid} \cdot \text{Area}} \\ &= \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Väg}}{\text{Tid} \cdot \text{Area}} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Area}} \cdot \frac{\text{Väg}}{\text{Tid}} \\ &= \text{Tryck} \cdot \text{Hastighet} \end{aligned}$$

Alltså har vi $I = p(t)v(t) = p^2(t)/\rho c$. Med $Z_0 = \rho c$ skriver vi $I = \frac{p^2}{Z_0}$.

8.9 Resonans

Vibrationer hos en viss kropp kan få en annan kropp att också börja vibrera. En stämgaffels skänklar vibrerar, men om skaftet hålls mot ett bord kan hela bordet börja vibrera, och ljudet blir mycket starkare. Rent ordagrant skulle man kunna kalla detta *resonans* (från latinet, 'återljud', 'genljud', 'återklang'). Ordet brukar dock ges en något mer specificerad innebörd, nämligen att svängningen hos en viss kropp (eller gas) får en annan kropp (eller gas) att börja svänga extra mycket vid någon viss frekvens (och att påverkan inte skulle ha blivit lika stor vid andra frekvenser). En mer formell defintion av resonans skulle därför kunna lyda: *Resonans är fenomenet att en svag, periodisk yttre störning (drivande kraft) inom ett snävt frekvensområde kan leda till att ett annat systems svängningsamplitud ökar kraftigt.* Observera att inget sägs om ljud i definitionen. Resonansbegreppet används allmänt inom mekaniken och fysiken, inte enbart inom akustiken.

∇ Ett vardagligt exempel på resonans är att någon knuffar på en gunga, så att dess utslag (svängningsamplitud) blir större och större. Knuffarna är den "yttre störningen", gungan är "systemet", enligt definitionen. Knuffarna måste sättas in vid rätt tidpunkt (när gungan är i sitt ytterläge eller strax därefter) för att amplituden ska öka kraftigt. Om man sätter in knuffarna vid slumpmässiga tidpunkter, eller regelbundet men med en frekvens som skiljer sig märkbart från gungans, kommer man inte att få gungans amplitud att öka kraftigt.

∇ En stämgaffel (benämnd A) som har en viss frekvens (säg 440 Hz) och sätts i rörelse alldeles intill en annan, likadan stämgaffel (B) kan få denna andra stämgaffel att också börja svänga. A:s svängningar går ut i luften, och luftens svängningar påverkar i sin tur B att börja svänga. Eftersom B är likadan som A ger den en ton med samma frekvens, 440 Hz. Det betyder att vågorna i luften knuffar på B:s skänklar i precis sätt tid, så att resonans uppstår. Om stämgaffel B varit avsedd att frambringa en ton på 420 Hz skulle den inte alls ha börjat svänga lika mycket genom påverkan från A.

∇ När skaftet på en stämgaffel med frekvensen 440 Hz (ettstrukna a) trycks mot ett bord och får det att ljuda är det däremot *inte* ett exempel på resonans i den mer specifika betydelsen, ty bordet svarar förmodligen lika bra vid någon annan frekvens, t.ex. 300 Hz.

Som exemplen ovan illustrerar finns det en naturlig frekvens hos systemet, och om den yttre störningen har precis samma frekvens så uppkommer resonans. Denna naturliga frekvens brukar kallas *egenfrekvens*, och man säger att systemet svänger i sin *egenmod*. (Mod, från latinets *modus*, betyder 'sätt', här snarast 'svängningssätt'.) Egenfrekvensen är antalet svängningar per sekund hos en konstruktion som får svänga fritt. Somliga konstruktioner har många egenfrekvenser, andra bara en. Några exempel:

∇ En pendel (en tyngd i ett snöre) som svänger fram och tillbaka har endast en naturlig frekvens (egenfrekvens), vars storlek beror på snörets längd. Det är stört omöjligt att få pendeln att svänga med någon annan frekvens, såvida man inte ändrar snörets längd.

∇ Broar och andra byggnadskonstruktioner kan komma i självsvängning, vilket ibland fått tragiska följder. Militära trupper brukar inte marschera i takt över broar, för att undvika risken att stegfrekvensen skulle överensstämma med någon av brons egenfrekvenser. Ett berömt fall av broresonans (orsakad av vind) gäller bron i Tacoma Narrows i delstaten Washington, USA, som kollapsade 1940.[†]

∇ Även stående vågor kan sägas uppstå genom resonans. När man blåser mot kanten av ett rör är anblåsningen ett brus, det vill säga en blandning av många frekvenser. Ändå frambringas en bestämd ton i röret. Det är nämligen vid en viss frekvens som villkoren för uppkomsten av en stående våg uppfylls. Denna frekvens, som alltså motsvarar en egenfrekvens för luften i röret, förstärks. Ett mer handfast

[†] Man kan dock diskutera om det verkligen var vanlig resonans som orsakade brons kollaps. Många läroböcker i fysik hävdar detta, men invändningar redovisas av K. Y. Billah & R. H. Scanlan, ”Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks”, *American Journal of Physics* 59(2), February 1991, s. 118–124.

sätt att demonstrera de stående vågornas resonanskaraktär är att svepa i frekvens med en högtalare framför ett rör. Vid vissa frekvenser, som motsvarar stående vågor, förstärks tonen märkbart av röret.

Vid ett systems resonansfrekvens (egenfrekvens) är uppenbarligen motståndet mot rörelse minimalt. Vid resonansfrekvensen når med andra ord impedansen ett minimum. Det kan den göra om mass- och fjädringsreaktanser tar ut varandra. De är ju motriktade, och om de tar ut varandra blir R det enda bidraget till impedansen. Om vi sätter X_m och X_s lika får vi sambandet $2\pi fm = \frac{\kappa}{2\pi f}$, ur vilket vi löser

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

Detta är alltså resonansfrekvensen för ett mekaniskt system. (Minns att formlerna för X_m och X_s avser mekaniska system, ej akustiska.)

∇ En tyngd på 10 kg hänger i en stark fjäder och vibrerar med sin resonansfrekvens, som är $f = 50$ Hz. Vilken styvhet har fjädern? *Lösning*: Ur formeln $f = (1/2\pi)\sqrt{\kappa/m}$ löser vi ut $\kappa = m(2\pi f)^2$. Insättning av de givna värdena ger $\kappa = 10 \cdot (2\pi \cdot 50)^2 \approx 9{,}9 \cdot 10^5$ N/m.

Under resonansfrekvensen är systemet fjäderlikt, vilket innebär att massan mer eller mindre kan försummas. Över resonansfrekvensen är systemet masslikt, och fjädringen kan försummas. Detta kan förklaras genom formlerna $X_m = 2\pi fm$ och $X_s = \kappa/2\pi f$. Vid resonansfrekvensen är X_m och X_s lika stora. Under resonansfrekvensen är X_m mindre än vid resonansfrekvensen, medan X_s är större, ty X_m är ju proportionell mot frekvensen, medan X_m är omvänt proportionell mot frekvensen. Fjädringsreaktansen dominerar alltså nedanför resonansfrekvensen, och systemet beter sig fjäderlikt. Ovanför resonansfrekvensen blir det tvärtom.

8.10 Övningsuppgifter

8-1. Mellan ljudintensitet I och ljudtryck p råder förhållandet $I = p^2/Z_0$, där Z_0 är den karakteristiska impedansen. Speciellt gäller $I_0 = p_0^2/Z_0$, där I_0 och p_0 är de sedvanliga referensvärdena för intensitet respektive tryck. Visa att $L_I = L_p$ om $L_I = 10 \cdot \lg(I/I_0)$ och $L_p = 20 \cdot \lg(p/p_0)$.

8-2. Enligt föregående uppgift gäller $I = p^2/Z_0$. Kontrollera att impedansen Z_0 enligt denna formel har enheten kg/m^{2}s, som har påståtts i detta kapitel i samband med formeln $Z_0 = \rho c$.

8-3. Ljudnivån är 70 dB SPL.

a) Vad är intensiteten?
b) Vad är ljudtrycket?

8-4. Tre pendlar, A, B och C, hänger på jämna avstånd på en stång. De är identiska så när som på att C är något längre än A och B. Pendel B sätts i svängning (utan att slå i någon av de andra pendlarna). Vilken av A och C kommer att svänga mest genom påverkan från B, och varför?

8-5. När ljud övergår från ett medium till ett annat gäller formeln $I_2 = I_1 \cdot t$, med $t = \frac{4Z_{21}}{(1+Z_{21})^2}$, varav $Z_{21} = Z_2/Z_1$, där index 1 avser det första mediet och index 2 det senare.
a) Visa att om mediernas impedanser är lika, så transmitteras allt ljud, om man ska tro formeln.
b) Bevisa att formeln ger samma resultat i båda riktningarna, med andra ord att $\frac{4Z_{21}}{(1+Z_{21})^2} = \frac{4Z_{12}}{(1+Z_{12})^2}$, där $Z_{12} = Z_1/Z_2$.

8-6. I detta kapitel har det påståtts att endast 0,1 % av ljudenergin transmitteras vid övergången från luft till (söt)vatten, medan 99,9 % reflekteras. Det påstods att det transmitterade ljudet därmed minskar 30 dB i nivå. Visa att dB-angivelsen är korrekt!

8-7. Den karakteristiska impedansen är som bekant $Z_0 = \rho c$, där ρ är densiteten och c är ljudhastigheten. I rent silver, med densiteten $\rho = 1{,}05 \cdot 10^4\ \mathrm{kg/m^3}$, är ljudhastigheten $c = 2700\ \mathrm{m/s}$.
a) Beräkna silvers karakteristiska impedans.
b) Hur stor del av ljudintensiteten transmitteras vid övergången från luft till rent silver? Använd formeln $t = \frac{4Z_{21}}{(1+Z_{21})^2}$.
c) Vad motsvarar ditt svar i b) uttryckt i dB?

8-8. I avsnitt 8.3 påstods att i fallet med ett luftfyllt rör som vid en viss punkt smalnar av från tvärsnittsarean A_1 till tvärsnittsarean A_2 gäller att transmissionskoefficienten är $t = \frac{4A_1A_2}{(A_1+A_2)^2}$. Visa att man får detta uttryck genom att utgå från $t = \frac{4Z_{21}}{(1+Z_{21})^2}$ och utnyttja att $Z_1 = \rho c/A_1$ och $Z_2 = \rho c/A_2$.

8-9. För en plan våg i luft vid, säg, temperaturen 20 °C är det många impedansformler som gäller: $Z = \rho c = \frac{p}{v} = \frac{p^2}{I}$.
a) Under antagandet att alla dessa uttryck för Z är giltiga samtidigt, och att Z betraktas som en konstant, ange en formel för partikelhastigheten v som funktion av enbart trycket p. (Konstanter får naturligtvis ingå i svaret.)
b) Vad blir den genomsnittliga partikelhastigheten vid trycket $p = 10^{-3}$

Pa?

c) Härled på samma sätt en formel för v som funktion enbart av I. (Konstanter får ingå i svaret.)

d) Vad blir den genomsnittliga partikelhastigheten vid intensiteten $I = 10^{-5}$ W/m^2?

8-10. Ange beloppet (”pilens längd”) för följande komplexa tal. Ange ditt svar med två gällande siffror.

a) $z = 2 + j9$	c) $z = -1 + j$	e) $z = 4{,}2 + j3{,}1$
b) $z = -13 - j4$	d) $z = 3 - j2$	f) $z = -2{,}7 + j\pi$

8-11. För en plan våg gäller $v = p/\rho c$. Om man antar sinusformad vågrörelse med vinkelhastigheten ω kan man genom att integrera formeln med avseende på tiden visa att partiklarnas genomsnittliga avvikelse från sina jämviktslägen (det vill säga förskjutningen) är $x = p/\rho c\omega$.

a) Vilken är den genomsnittliga förskjutningen för en plan, sinusformad ljudvåg i luft vid normalt lufttryck och rumstemperatur, om ljudnivån är 80 dB SPL och frekvensen är 1000 Hz? Jämför med det typiska avståndet mellan luftmolekyler, $3 \cdot 10^{-9}$ m.

b) Vilken är den genomsnittliga förskjutningen för en plan, sinusformad ljudvåg i luft vid normalt lufttryck och rumstemperatur, om ljudnivån är 0 dB SPL och frekvensen är 1000 Hz? Jämför med det typiska avståndet mellan luftmolekyler, $3 \cdot 10^{-9}$ m.

8-12. Vid normalt tryck är den karakteristiska impedansen för luft ungefär 415 kg/m^{2}s, medan ljudhastigheten är 340 m/s. Vad väger 1,0 liter luft vid normalt tryck?

8-13. Om man talar i en megafon av trattutseende kommer man att finna att åskådarna framför megafonen hör bättre med än utan megafon, och detta även om megafonen inte har någon inbyggd elektrisk förstärkning. Detta har inte enbart med riktverkan att göra, ty om man talar i en hushållsrulle koncentreras ljudets riktning ännu mer, men med sämre hörbarhet för åhörarna. Förklara varför det blir så.

8-14. Vad har glas av pyrex-typ för densitet? (Kombinera information från tabeller i avsnitt 7.2 och 8.2.)

8-15. I figurerna 8.1 och 8.2 har luften liknats vid små masspartiklar som är sammanbundna med varandra via fjädrar. Beskriv kortfattat dels vad liknelsen säger om luften som är korrekt, dels vad den säger om luften som inte är korrekt.

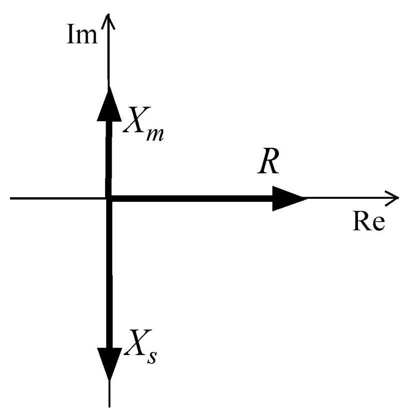
8-16. Enligt ett överkursavsnitt i kapitel 3.3 är en korrekt formel för en pendels svängningstid (periodtid) $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, där L är längden och g är gravitationskonstanten. En pendel svänger vid sin resonansfrekvens, och vi vet att resonansfrekvensen kan skrivas $f = (1/2\pi)\sqrt{\kappa/m}$, där κ är fjäderkonstanten (styvheten) och m massan. Vilken styvhet kan tillskrivas pendeln, uttryckt i L, g och m?

8-17. Ett föremål med massan $1{,}13$ kg är fäst i en fjäder, t.ex. enligt figur 4.3. När man anlägger kraften 79 N trycks fjädern ihop så att den blir $3{,}5$ cm kortare jämfört med jämviktsläget. Vad är systemets resonansfrekvens?

8-18. En viss bilvåg fungerar på så sätt att bilen placeras på en platta, som i sin tur hålls uppe av fjädrar. Bilens vikt bedöms genom att man avläser hur mycket plattan sjunker när bilen står på den. När en bil med massan $m = 850$ kg ställs på plattan, sjunker den $6{,}5$ cm.

a) Vad är fjäderkonstanten, om vi betraktar alla fjädrar under plattan som en enda stor fjäder?
b) Vad är resonansfrekvensen?
c) Hur stor är massreaktansen och fjädringsreaktansen vid resonansfrekvensen? (Vi har här inte ett akustiskt system, utan ett mekaniskt. Enheten för reaktans ska därför inte bli akustisk ohm.)

8-19. Figuren nedan visar resistansens och reaktanskomponenternas storlekar hos ett visst system vid en viss frekvens.



a) Rita ut den totala impedansen i samma figur.
b) Befinner sig systemet ovanför eller nedanför sin resonansfrekvens?

Motivera svaret.

8-20. Ange för vart och ett av påståendena a)–e) huruvida det är sant eller falskt.

a) Om ett systems fjädringsreaktans är lika stor som resistansen, befinner sig systemet vid sin resonansfrekvens.
b) Summan av fjädringsreaktans och massreaktans är alltid noll.
c) Ovanför resonansfrekvensen är massreaktansen större än fjädringsreaktansen.
d) Beloppet av ett systems totala impedans är alltid minst lika stort som beloppet av dess resistans.
e) När impedansen uttryckt som en komplex storhet är rent imaginär, saknar systemet resistans.